

Lorenz96モデルのEnKFと カオス同期の間欠性

MACSプログラム

SG2020-1:データ同化の数理と応用：理論モデルとデータをつなぐデータサイエンス

京都大学理学部地球物理学系統測地学研究室4回生

大畠敬就

目的

- ・ ローカライズ有のEnKFを実装できるようになる
- ・ PO法とLETKFの違いについて理解する
- ・ 観測点数がOn-Off-intermittency に与える影響について考える

実験内容

- ・ Lorenz96モデルで、PO法（localization 有り）、およびLETKFを実装した。
- ・ InflationとLocalizationを変えたときの、真値からの誤差のRMS、およびアンサンブルスプレッドを求めた。
- ・ いくつかの結果についてはRMSの時間発展の図を描き、On-Off-Intermittency が生じていることを確認した。
- ・ 最後にPO法とLETKFの違いや、観測点数が与える影響について考察した。

方法 trueモデル

① 初期値の作成

$$x_{init} = \underbrace{(F, \dots, F)}_{40} \quad F=8.0 \text{ (外力項)}$$

$$x_{init}(20) = F + 0.008 \quad \text{20番目の格子点だけ擾乱を加える}$$

② forward 計算

Lorenz 96モデル $f(x, t) = \frac{dx_i}{dt} = (x_{i+1} - x_{i-2})x_{i-1} - x_i + F$

RK45 $k_1 = f(x, t)$

$$k_2 = f\left(x + k_1 \frac{dt}{2}, t + \frac{dt}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x + k_2 \frac{dt}{2}, t + \frac{dt}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x + k_3 dt, t + dt)$$

$$dt = 0.001$$

$$ID = 0.2$$

$$x(t+dt) = x(t) + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \frac{dt}{6}$$

③ 1年間 spin up

④ 観測データ作成。6時間 (0.05ヶ月ステップ) 間隔

ランダムに N_{obs} 個作成。

$$y(t) = H(t)x(t) + N(0, 1)$$

$H(t)$ 観測行列 $N(0, 1)$ 観測誤差の正規乱数

データ同化

① 初期アンサンブル作成

i : アンサンブル番号 $1 \leq i \leq 10$
 j : 格子点番号 $1 \leq j \leq 40$

$$① x_{init}^{(i)} = \underbrace{(F, \dots, F)}_{40 \text{ 個}} + (v_1^{(i)}, \dots, v_{40}^{(i)})$$

② 30日間 forward 計算して初期値に $v_j^{(i)} = N(0, 1)$ 正規乱数

$F = 8.0$ 外力項

② forward 計算

Lorenz 96モデル $f(x, t) = \frac{dx_i}{dt} = (x_{i+1} - x_{i-2})x_{i-1} - x_i + F$

RK45

$$k_1 = f(x, t)$$

$$k_2 = f\left(x + \frac{k_1}{2} dt, t + \frac{dt}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{k_2}{2} dt, t + \frac{dt}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x + k_3 dt, t + dt)$$

$$dt = 0.001$$

$$ID = 0.2$$

$$x(t+dt) = x(t) + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \frac{dt}{6}$$

③ データ同化 6時間 (0.05ヶ月ステップ) 間隔

方法 PO法 Localization 有り

① インテグレーション

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x^{(i)}$$

$$\delta x = x^{(i)} - \bar{x}$$

$$x^{(i+1)} = \alpha \delta x^{(i)} + \bar{x} \quad \alpha: \text{インテグレーションの値}$$

i : アンサンブル番号 $1 \leq i \leq 10$
 j : 格子点番号 $1 \leq j \leq 40$

l : 現在同化中の観測点がある格子点番号 $1 \leq l \leq 40$

② 観測点ごとに同化 (観測点ごとにループ)

① $R = 1.0$ (観測誤差)

② モデル誤差共分散行列に相当するベクトル P を求める

$$\bar{x}^f = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x^{(i)}$$

ベクトル

$$P = \frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (x^{(i)} - \bar{x}^f) (\overbrace{x_l^{(i)} - \bar{x}_l^{(i)}}^{\text{スカラー}})$$

$P_l, x_l^{(i)}$: 現在同化中の観測点がある格子点での値

③ カルマンゲイン K ベクトルの計算

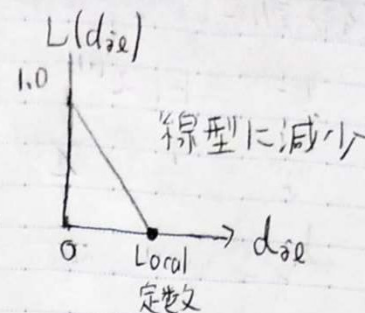
$$K = \frac{P}{P_l + R}$$

④ Localization

$$K_l^* = L(d_{ie}) K_l$$

d_{ie} : 現在同化中の観測点の位置 l と、格子点 i までの距離

$L(d_{ie})$: Localization の割合
 $0 \leq L(d_{ie}) \leq 1$



⑤ イノベーション

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + K (y + N(0,1) - x_l^{(i)})$$

y : 現在同化中の観測点での観測値

$N(0,1)$: 観測誤差に相当する正規乱数を足す。

⑥ 次の観測点のループへ

$$x^{(i+1)} = x^{(i+1)}$$

③ 観測点ごとの同化ループ終了, 次の forward 計算へ

$$x^{(i)} = x^{(i)}$$

方法 LETKF

① 観測測点でのモデルの平均からのずれ Y^b を求める。 i : アンサンブル番号 $1 \leq i \leq 10$

$$y^{b(i)} = H x^{(i)} \quad H: \text{観測行列}$$

$$\bar{y}^b = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y^{b(i)} \quad N_{\text{obs}}: \text{観測点数}$$

$$Y^b = y^{b(i)} - \bar{y}^b \quad (N_{\text{obs}} \times 10 \text{ 行列})$$

② モデルの平均からのずれ X^b を求める。

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x^{(i)} \quad X^b = x^{(i)} - \bar{x} \quad (40 \times 10 \text{ 行列})$$

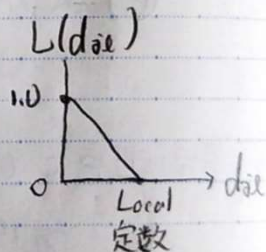
③ 格子点ごとにIL-70に同化 i : 格子点番号

① $R^{-1} = \frac{1}{10} I$ を Localization

$R^{-1} = \frac{1}{10} I$: 観測誤差の逆数 $\frac{1}{10}$ を
対角成分にもつ ($N_{\text{obs}} \times N_{\text{obs}}$ 対角行列)

$$R_{(i,i)}^{-1} = R_{(i,i)}^{-1} \cdot L(d_{i,i})$$

$d_{i,i}$: 現在同化中の格子点 i と、
 R^{-1} の (i,i) 成分の観測点 i までの距離



$L(d_{i,i})$: Localization の割合

$$0 \leq L(d_{i,i}) \leq 1$$

② C および \hat{P}_a^{-1} の計算

$$C = (Y^b)^T R^{-1}$$

$$\hat{P}_a^{-1} = (10-1) \cdot \frac{1}{\alpha} I + C Y^b \quad (10 \times 10 \text{ 行列})$$

α : イルミネーション I : 単位行列 (10×10)

③ 固有値分解 $\hat{P}_a^{-1} = V \Lambda V^T$

V : 固有ベクトルの行列 Λ : 固有値の対角行列

④ \tilde{P}_a, W_a の計算

$$\tilde{P}_a = [(10-1) \frac{1}{\alpha} I + C Y^b]^{-1} = V \Lambda^{-1} V^T$$

$$W_a = [(10-1) \tilde{P}_a]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{10-1} \cdot V \Lambda^{-\frac{1}{2}} V^T$$

⑤ 平均値のインバージョン

$$\bar{w}_a = \tilde{P}_a C (y^o - \bar{y}^b) \quad y^o: \text{観測値}$$

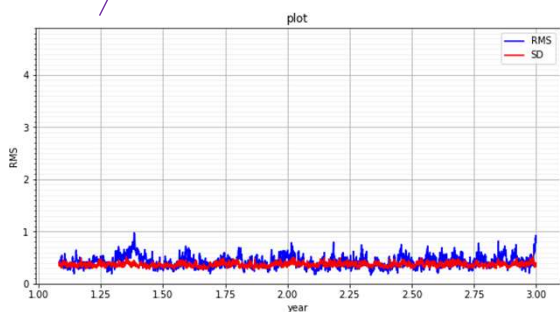
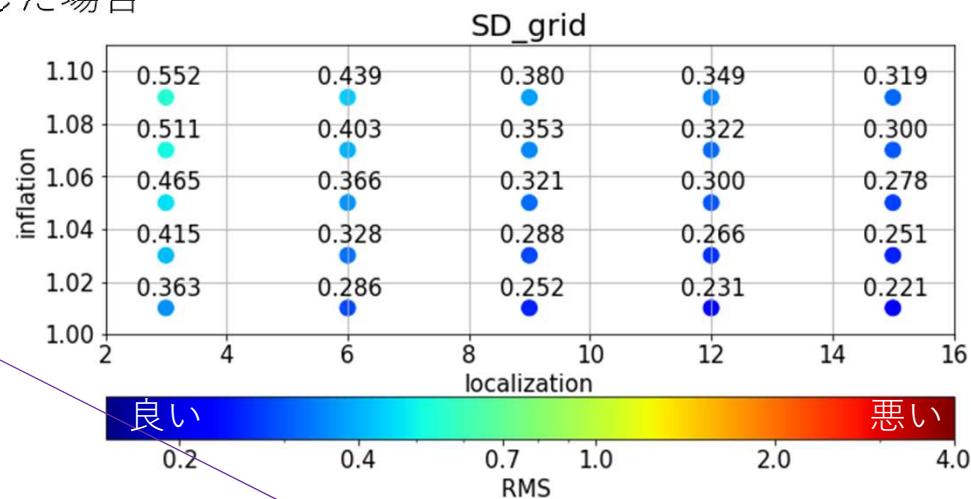
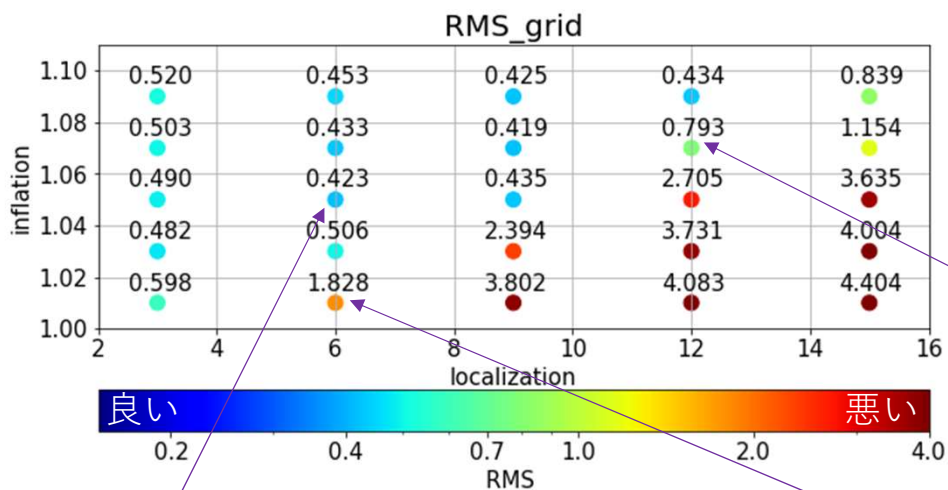
⑥ 各アンサンブルのずれのインバージョン

$$W_a^{(i)} = w_a^{(i)} + \bar{w}_a \quad (10 \times 10 \text{ 行列})$$

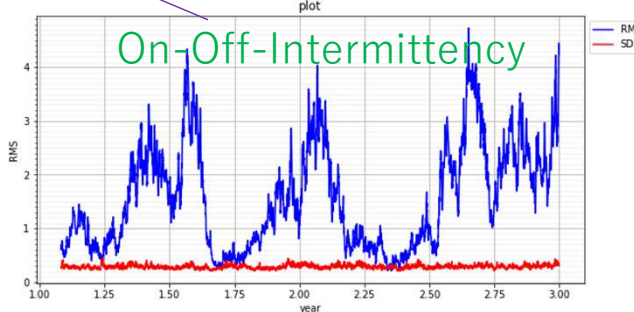
① 新アンサンブル作成

$$x_j^{a(i)} = \bar{x}_j + \sum_{p=1}^{10} X_j^b(i,p) W_a(p,i)$$

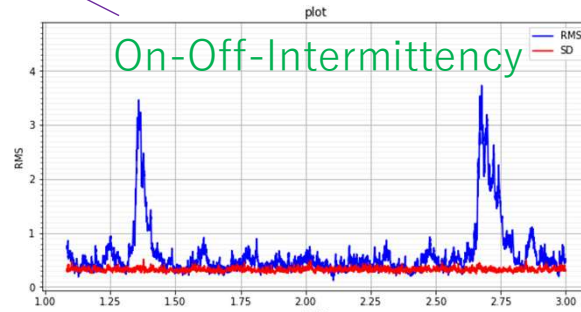
PO法 Localize有 Nens=10, obs=20 2年間同化した場合



Inf : 1.05 local : 6

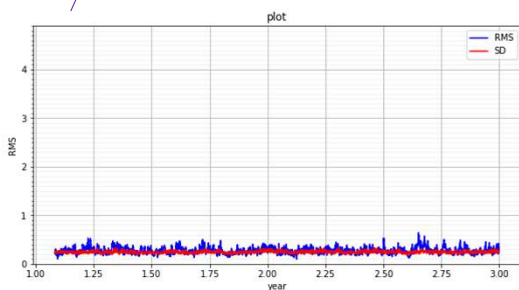
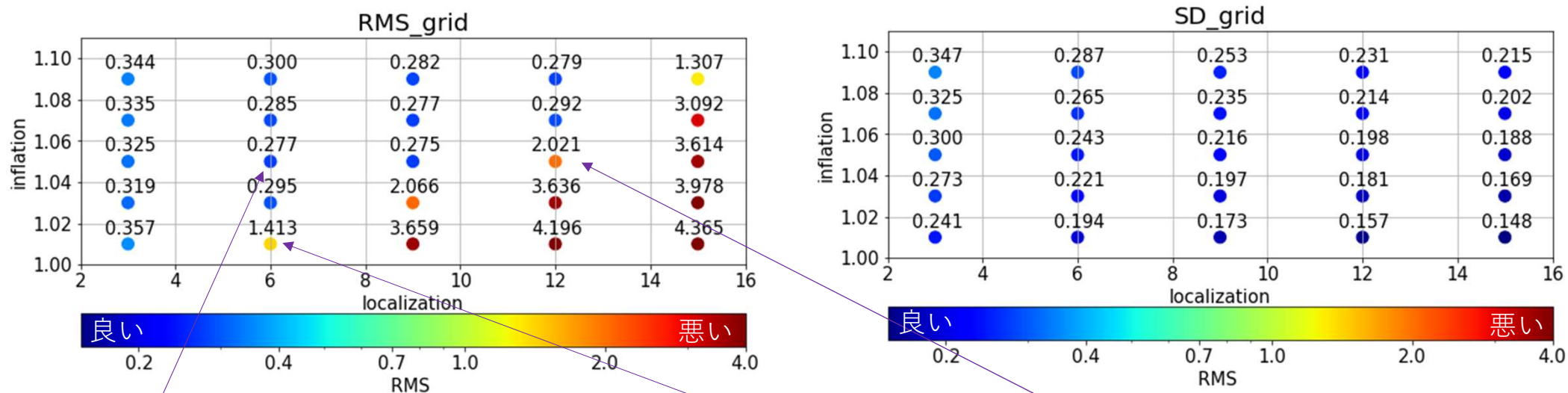


Inf : 1.01 local : 6

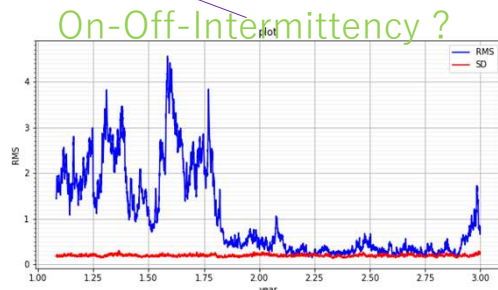


Inf : 1.08 local : 12

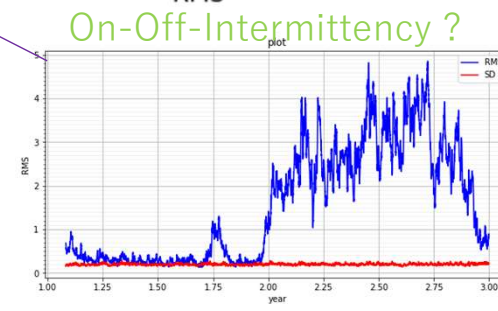
PO法 Localize有 Nens=10, obs=40 2年間同化した場合



Inf : 1.05 local : 6



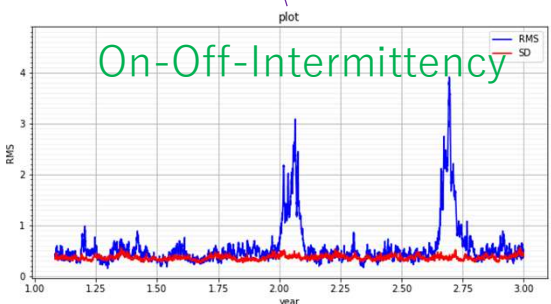
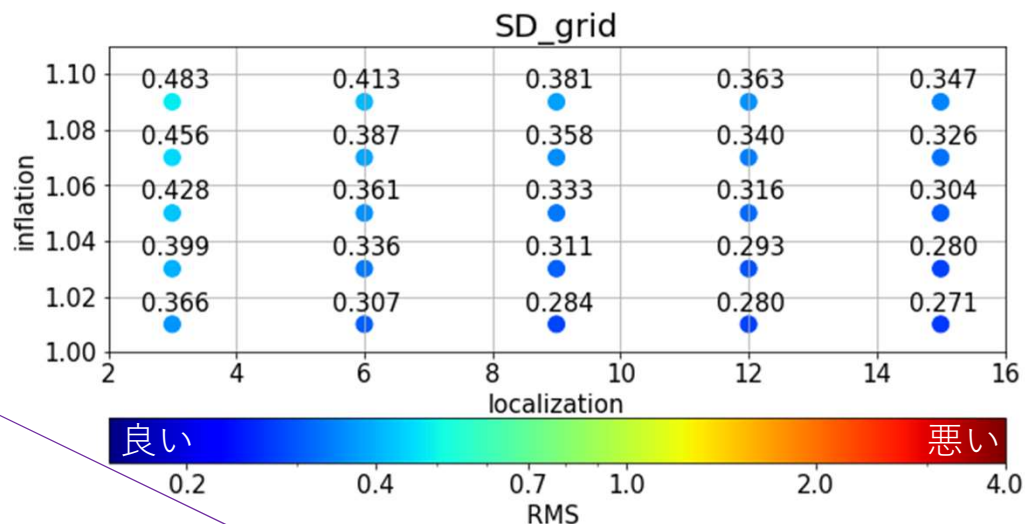
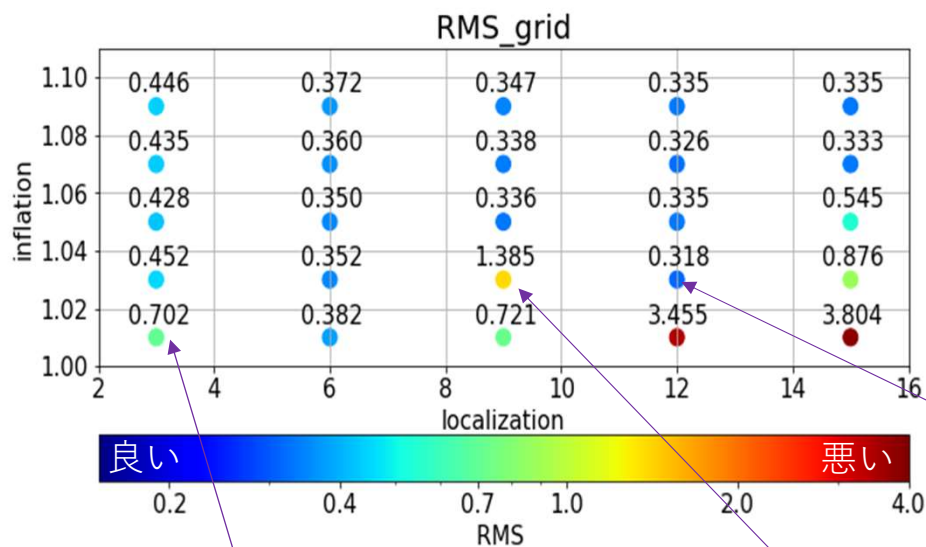
Inf : 1.01 local : 6



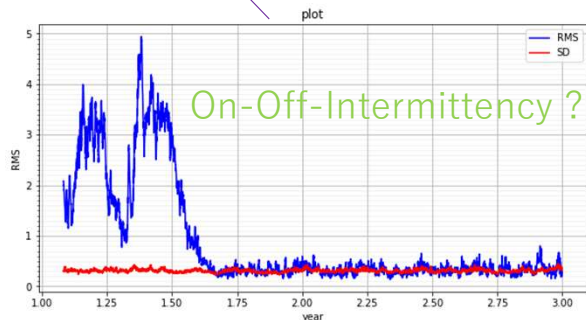
Inf : 1.05 local : 12

観測点数20点の時よりも全体的にRMS、アンサンブルスプレッドがともに小さくなった。

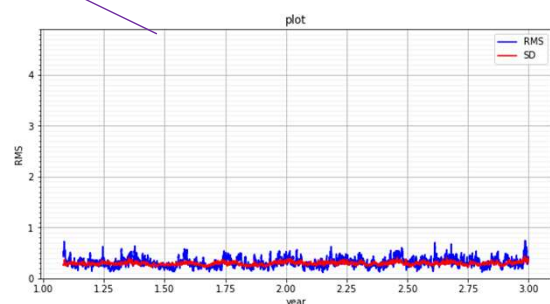
LETKF Nens=10, obs=20 2年間同化した場合



Inf : 1.01 local : 3



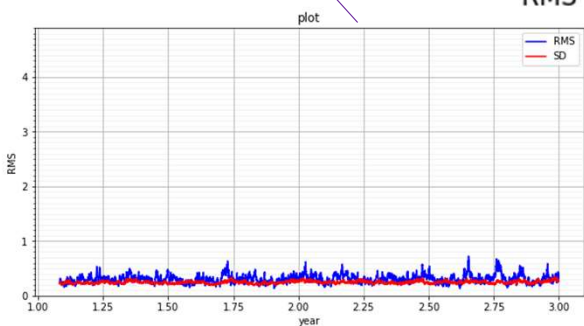
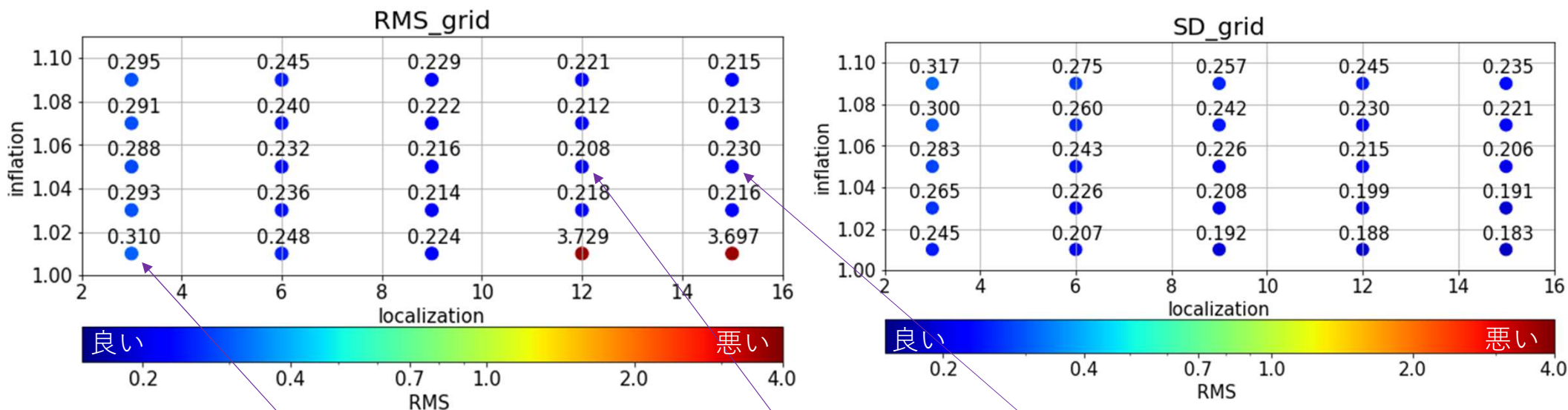
Inf : 1.03 local : 9



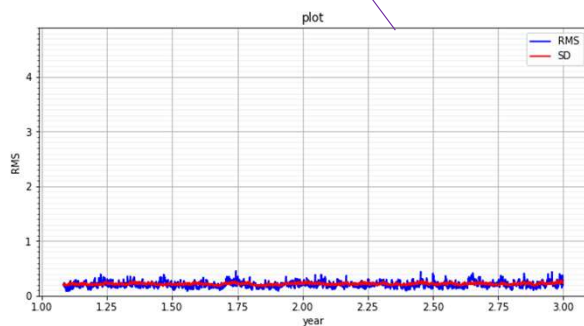
Inf : 1.03 local : 12

観測点数20点のPO法と比べて、アンサンブルスプレッドはあまり変わらないが、RMSは小さくなった。

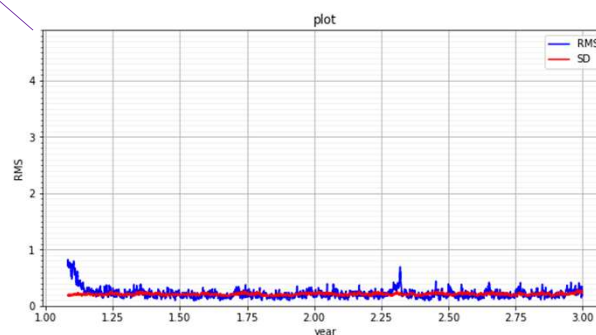
LETKF Nens=10, obs=40 2年間同化した場合



Inf : 1.01 local : 3



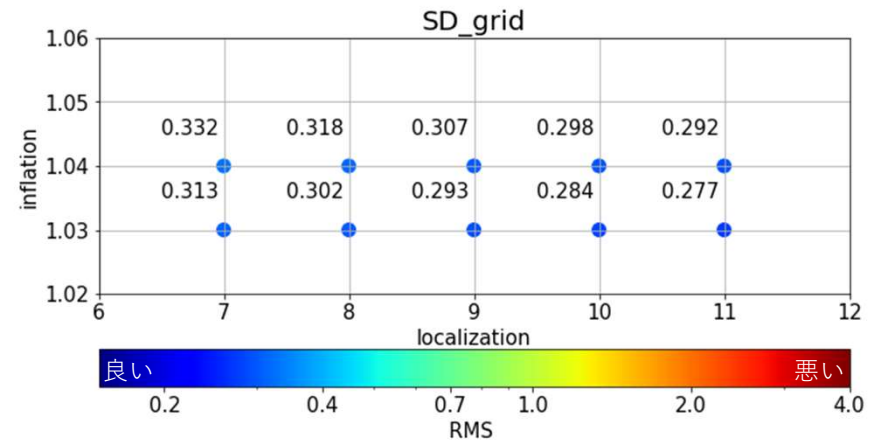
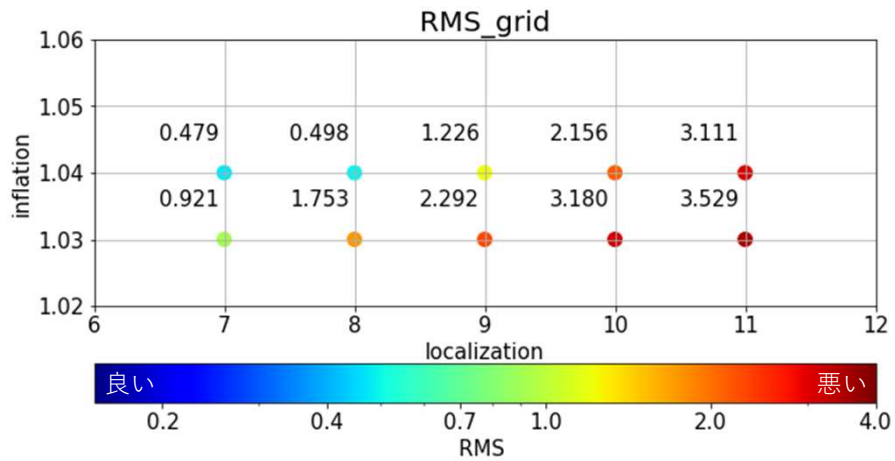
Inf : 1.05 local : 12



Inf : 1.05 local : 15

観測点数40点のPO法と比べて、アンサンブルスプレッドはあまり変わらないが、RMSは小さくなった。
 観測点数20点の時よりも全体的にRMS、アンサンブルスプレッドがともに小さくなった。

PO法 Localize有 Nens=10, obs=20 20年間同化した場合



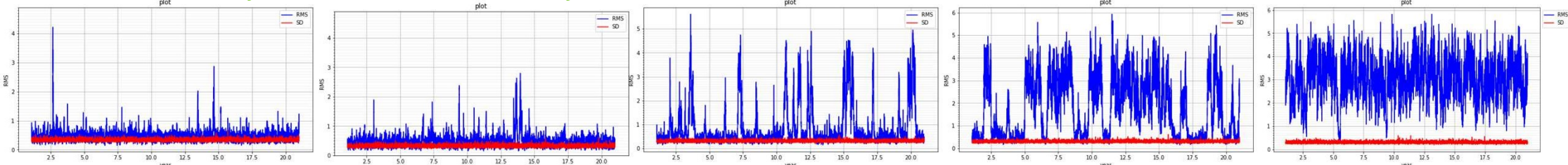
On-Off-Intermittency ?

On-Off-Intermittency ?

On-Off-Intermittency

On-Off-Intermittency

On-Off-Intermittency ?



Inf : 1.04 local : 7

Inf : 1.04 local : 8

Inf : 1.04 local : 9

Inf : 1.04 local : 10

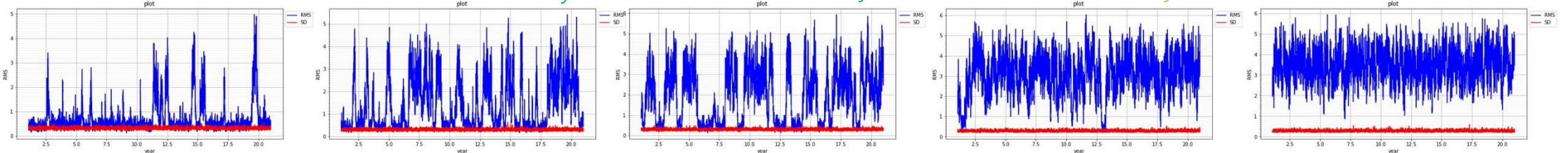
Inf : 1.04 local : 11

On-Off-Intermittency

On-Off-Intermittency

On-Off-Intermittency

On-Off-Intermittency ?



Inf : 1.03 local : 7

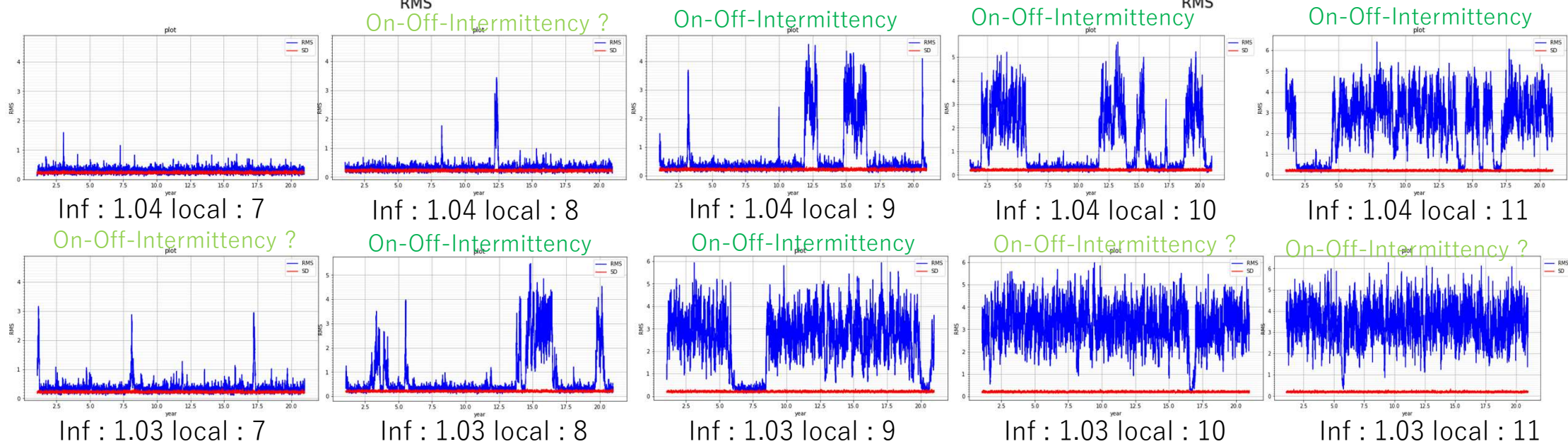
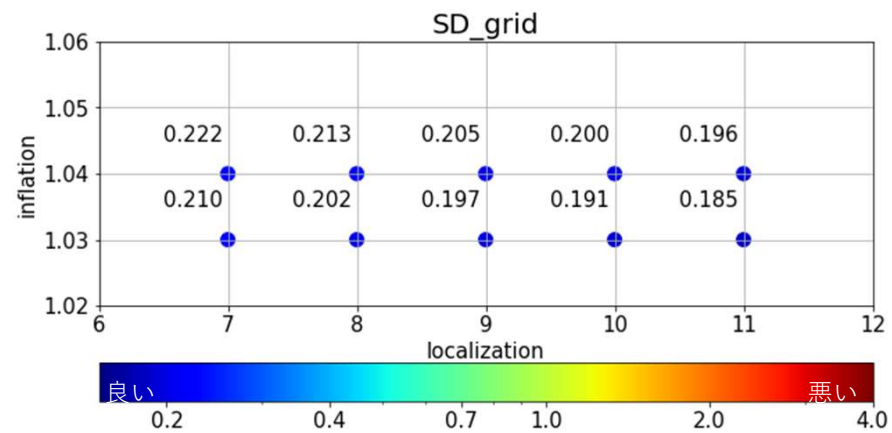
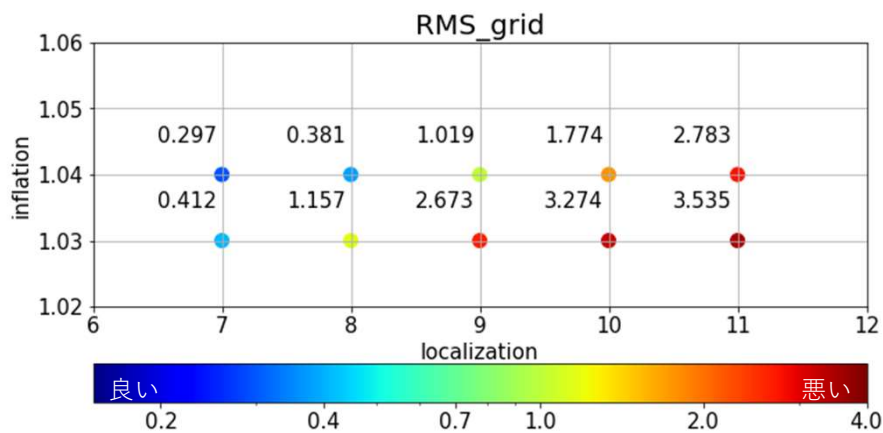
Inf : 1.03 local : 8

Inf : 1.03 local : 9

Inf : 1.03 local : 10

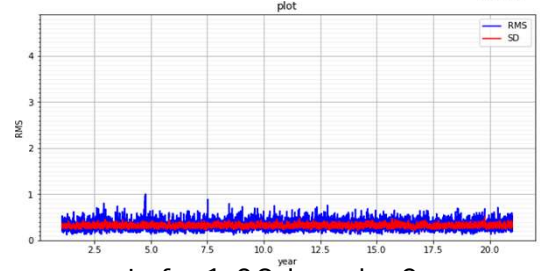
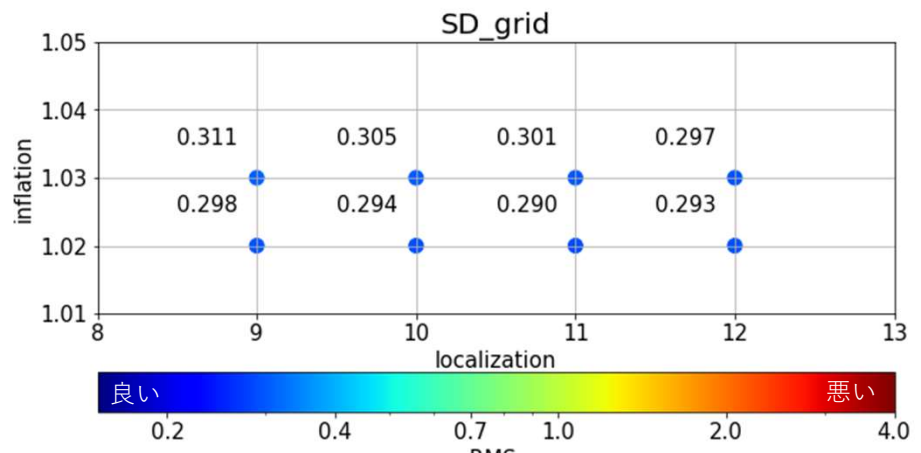
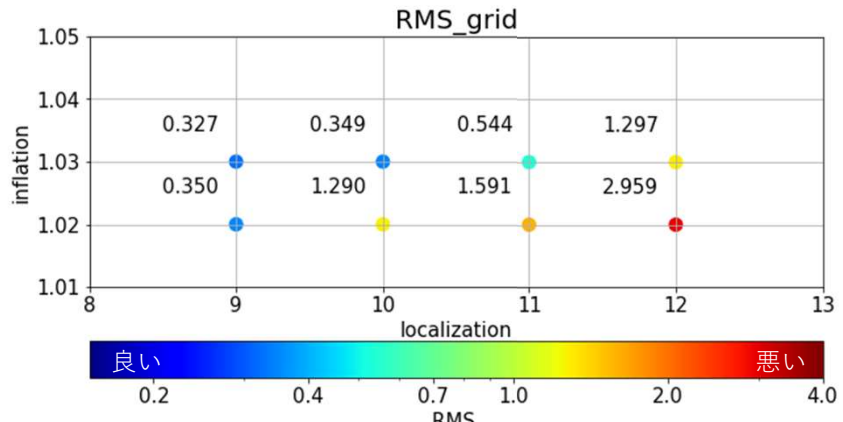
Inf : 1.03 local : 11

PO法 Localize有 Nens=10, obs=40 20年間同化した場合

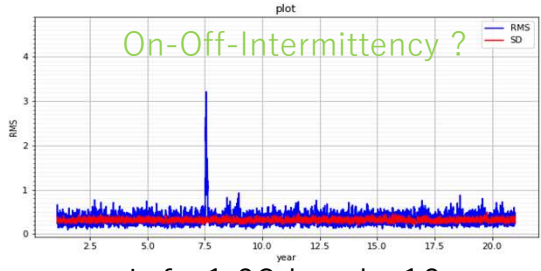


観測点数20点の時よりも、onとoffの切り替えの頻度が下がっている

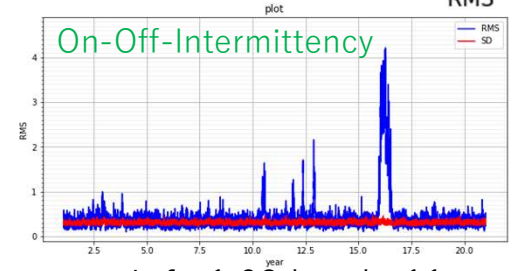
LETKF Nens=10, obs=20 20年間同化した場合



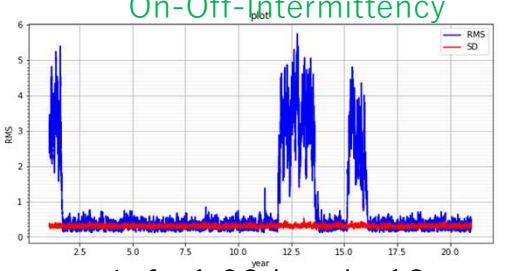
Inf : 1.03 local : 9



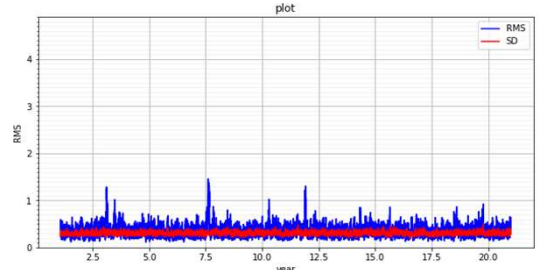
Inf : 1.03 local : 10



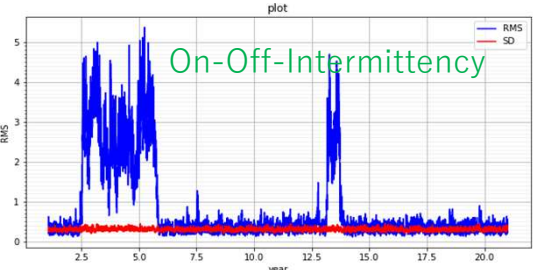
Inf : 1.03 local : 11



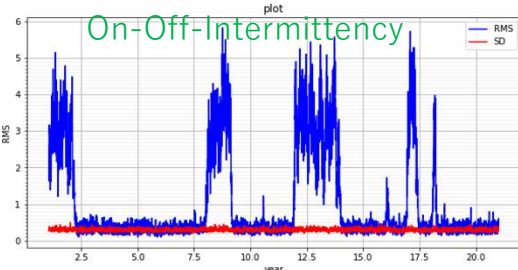
Inf : 1.03 local : 12



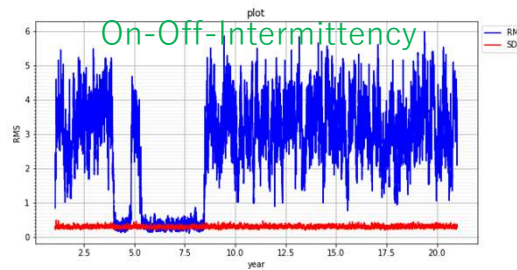
Inf : 1.02 local : 9



Inf : 1.02 local : 10



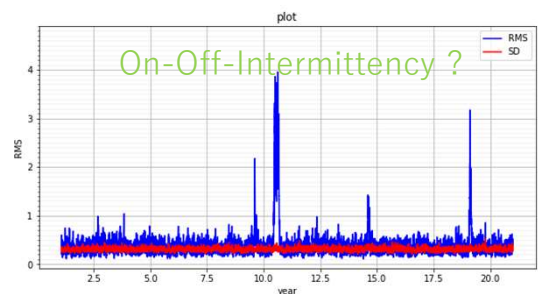
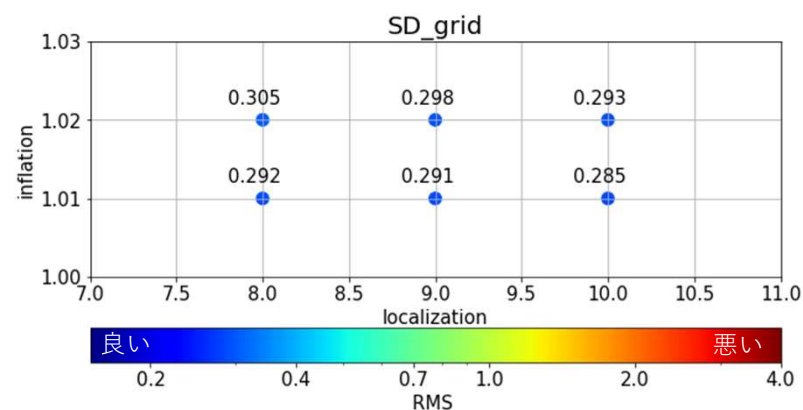
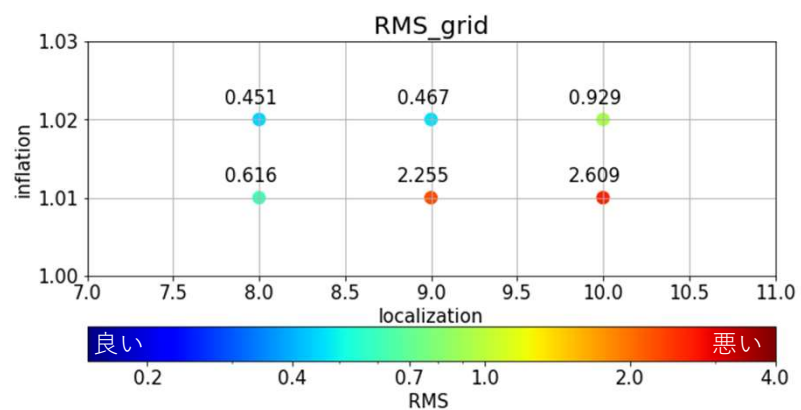
Inf : 1.02 local : 11



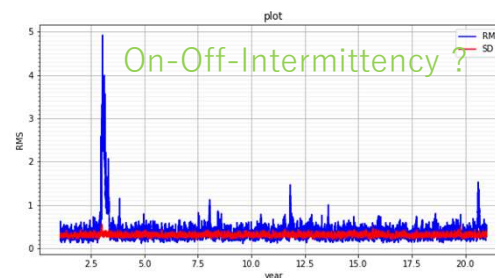
Inf : 1.02 local : 12

PO法の時よりも、OnとOffの切り替えの頻度が少ない

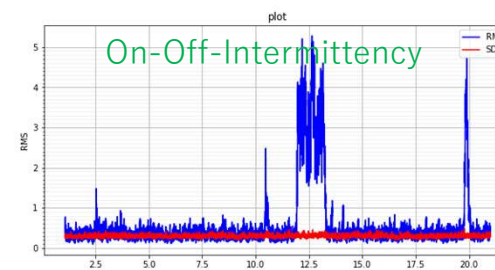
LETKF Nens=10, obs=20 20年間同化した場合



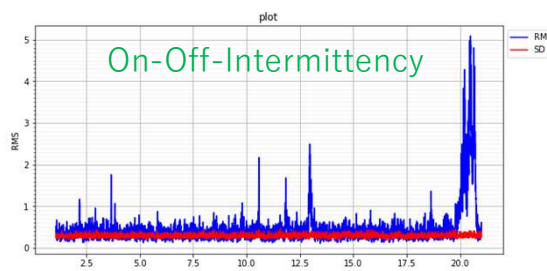
Inf : 1.02 local : 8



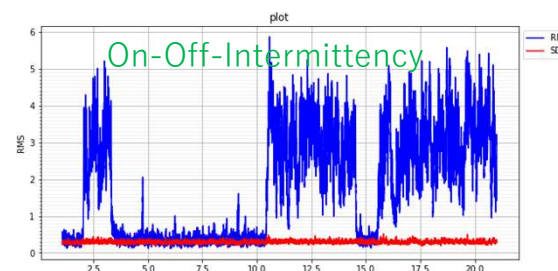
Inf : 1.02 local : 9



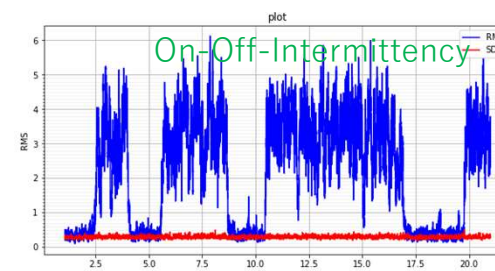
Inf : 1.02 local : 10



Inf : 1.02 local : 8

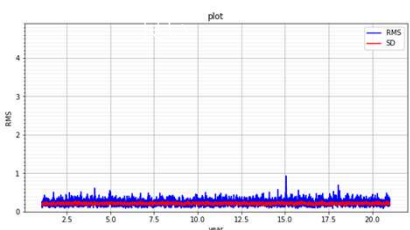
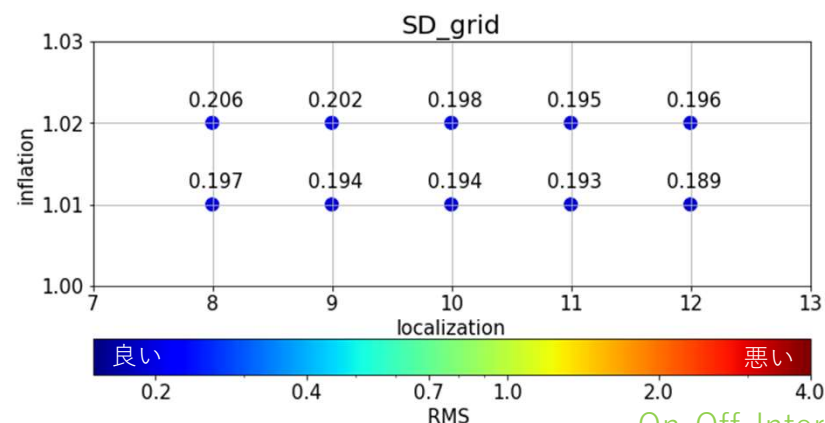
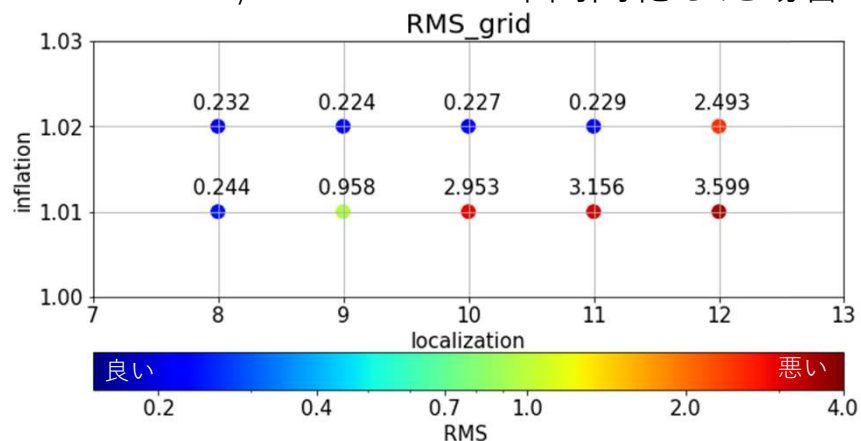


Inf : 1.02 local : 9

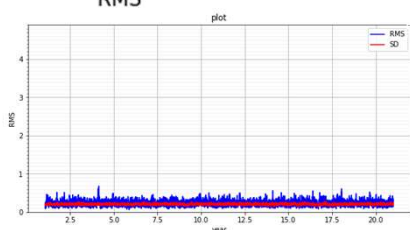


Inf : 1.02 local : 10

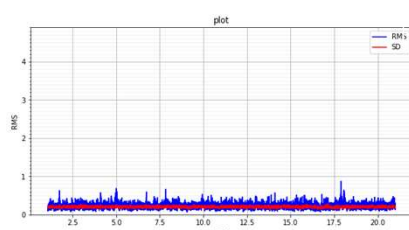
LETKF Nens=10, obs=40 20年間同化した場合



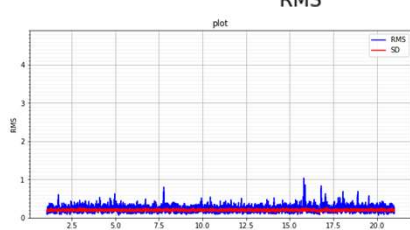
Inf : 1.02 local : 8



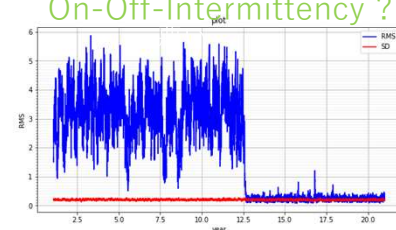
Inf : 1.02 local : 9



Inf : 1.02 local : 10

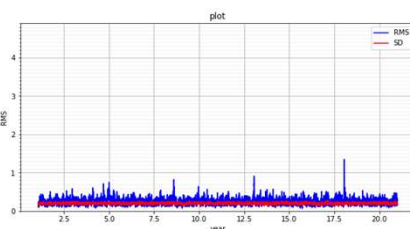


Inf : 1.02 local : 11

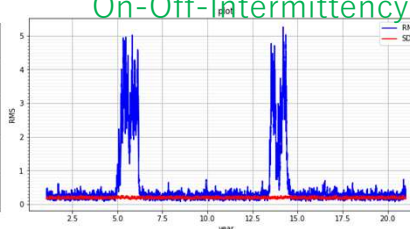


On-Off-Intermittency ?

Inf : 1.02 local : 12

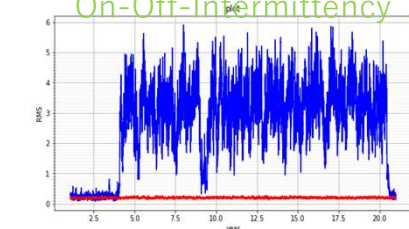


Inf : 1.01 local : 8



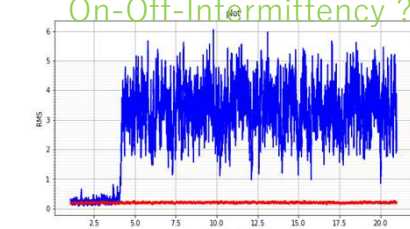
On-Off-Intermittency

Inf : 1.01 local : 9



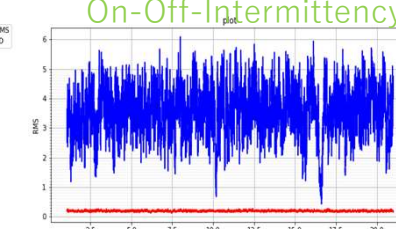
On-Off-Intermittency ?

Inf : 1.01 local : 10



On-Off-Intermittency ?

Inf : 1.01 local : 11



On-Off-Intermittency ?

Inf : 1.01 local : 12

PO法よりもOnとOffの切り替えの頻度が少ない。
観測点数20点の時よりも、On-Off-Intermittencyが生じにくい。

まとめと考察

- $RMS \leq$ アンサンブルスプレッドの場合、
local が大きくなり、inflation が小さくなるほど、RMSは小さくなった。
→local を大きくすると、より多くの観測の情報を取り込めるから。
→inflation を大きくすると、アンサンブルスプレッドが大きくなってしまうから。
- local を大きくしすぎたり、inflationを小さくしすぎると、
 $RMS >$ アンサンブルスプレッドとなり、発散した。
→local を大きくしすぎると、遠くの観測との関係ない相関を取りこんでしまうから。
→inflationを小さくしすぎると、アンサンブルスプレッドが小さくなりすぎ、
観測データを取り込まなくなってしまうから。
- RMSが $0.5 \leq RMS \leq 3.0$ ぐらいの時、On-Off-Intermittencyが生じた。
- PO法とLETKFで、アンサンブルスプレッドはあまり変わらなかった。
- PO法よりもLETKFのほうが、RMSが小さくなった。
- PO法よりもLETKFのほうが、OnとOffの切り替えの頻度が少なくなった。
→PO法では同化のたびに観測誤差を乱数として与えるから。
- 観測点数が増えると、OnとOffの切り替えの頻度が少なくなった。
→不確実性が減るから。

参考・参照文献

Brian R. Hunt, Eric J. Kostelich, Istvan Szunyogh,
Efficient data assimilation for spatiotemporal chaos: A local ensemble transform Kalman filter,
Physica D: Nonlinear Phenomena,
Volume 230, Issues 1–2, 2007, Pages 112–126, ISSN 0167-2789,
<https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.11.008>.

Edward N. Lorenz 1 and Kerry A. Emanuel 1
Optimal Sites for Supplementary Weather Observations: Simulation with a Small Model
01 Feb 1998 Journal of the Atmospheric Sciences Volume 55: Issue 3 Pages 399–414
[https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1998\)055%3C0399:OSFSWO%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1998)055%3C0399:OSFSWO%3E2.0.CO;2)

編著：樋口知之 著：上野玄太 中野慎也 中村和幸 吉田亮
シリーズ 予測と発見の科学 データ同化入門 一次世代のシミュレーション技術—
朝倉書店

Michael K. Tippett , Jeffrey L. Anderson , Craig H. Bishop , Thomas M. Hamill , Jeffrey , S. Whitaker
Ensemble squareroot filters
January 30, 2002
https://iri.columbia.edu/~tippett/pubs/srf_submit1.pdf

三好建正
アンサンブル・カルマンフィルタ—データ同化とアンサンブル予報の接点—
天気 2004年
https://www.metsoc.jp/tenki/pdf/2005/2005_02_0093.pdf