ガロア祭2016懸賞問題

（提出先は数学教室事務室。5 月 27 日（金）17:00 締切。発表はガロア祭当日、副賞あり。）

問題 $\boxed{1}$ （出題：入谷）3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな曲面を数式で表すことを考えます．例えば球面は

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

のように 3 変数多項式のゼロ点として書くことが出来ます．また，トーラス（浮き輪，あるいはドーナツの表面）は (x, y) 平面に描かれた円

$$(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

を y 軸に関して回転させて得られるので，

$$\left(\sqrt{x^2+z^2} - 1\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

という式で表されることが分かります．この式を $\sqrt{x^2+y^2} = \cdots$ の形に整理して二乗し根号を払うと，やはり x, y, z の多項式のゼロ点集合として表すことが可能です．

では，種数 2 の曲面（二人乗りの浮き輪の表面）を x, y, z に関する多項式のゼロ点集合として表すことは出来るでしょうか？

問題 $\boxed{2}$ （出題：石塚）a を正の実数とする．正の実数のうち，

$$\sum_{i=0}^{n} c_i a^i \qquad (n, c_i \text{は整数},\ n \geq 0,\ -1 \leq c_i \leq 1)$$

の形で表されるもの全体の集合を S_a とおく．

(1) $a = \dfrac{3}{2}$ とする．$S_{\frac{3}{2}}$ に属する実数の中には，最小のものは存在するだろうか? 存在する場合は，それを求めよ．存在しない場合は，存在しないことを示せ．

(2) a を $\frac{3}{2}$ 以外の正の実数としたとき，(1) の問について自由に考察してください．

問題 $\boxed{3}$ （出題：池田）$f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ を n 変数の実数係数多項式とする．

(1) $f(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}$ ならば $f(x_1, \ldots, x_n)$ は有理数係数の多項式であることを示せ．

(2) $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}_{>0}$ となる $f(x_1, \ldots, x_n)$ の例（なるべく n の小さいもの）をあげよ．ここで $\mathbb{Z}_{>0}$ は正の整数全体である．

問題 $\boxed{4}$ （出題：岸本）$\mathbb{R}^4$ 内の 4 次元凸多面体 P の各辺が x 軸と垂直でないとする．P の頂点 v に対して

$$\mathrm{ind}(v) = \sharp\{v \text{ を端点とする辺で } x \text{ 軸に関して } v \text{ より上にあるもの}\}$$

とし，

$$I(q) = \sharp\{P \text{ の頂点 } v \mid \mathrm{ind}(v) = q\}$$

とする．

(1) $k \geq -1$ に対して f_k を P の $(3-k)$ 次元の面の数とし，

$$h_0t^4 + h_1t^3 + h_2t^2 + h_3t + h_4 = (t-1)^4 + f_0(t-1)^3 + f_1(t-1)^2 + f_2(t-1) + f_3$$

で $h_0, \ldots, h_4$ を定める．（したがって，$f_{-1} = 1$ である．）P の各頂点に集まる辺の数がちょうど 4 本のとき，

$$h_{4-q} = I(q)$$

が成り立つことを示せ．

(2) (1) の仮定のもと，次の等式が成り立つことを示せ．

$$h_q = h_{4-q}$$

問題 $\boxed{5}$ （出題：雪江）以下 p は素数とする．x, y, n が整数で $x - y$ が n で割り切れるとき，x, y は $\mod n$ で合同であるといい，$x \equiv y \mod n$ と書く．この問題では，以下を認める．

(a) n が素数 p で割れない整数なら，$nm \equiv 1 \mod p$ となるような整数 m が存在する．

(b) p が素数なら，$n, n^2, \ldots, n^{p-1}$ のうちどの二つも $\mod p$ で合同でないような整数 n が存在する．

(c) p が 4 で割って 1 余る素数なら，n^2+1 が p で割り切れるような整数 n が存在する．

このとき，以下の問 (1)–(3) に答えよ．

(1) p を素数とする．$X^4 - 17Z^4 \equiv 2Y^2 \mod p$ となる整数 X, Y, Z で Z が p で割り切れないものがあれば，整数 x, y で $x^4 - 17 \equiv 2y^2 \mod p$ となるものがあることを証明せよ．

(2) 任意の素数 p に対し，$x^4 - 1 \equiv 2y^2 \mod p$ となる整数 x, y が存在することを証明せよ．(ヒント: $p = 2, 17$ と $p-1$ が 4 で割り切れる場合と割り切れない場合に分けて考えよ．)

(3) 任意の正の整数 n に対し $x^4 - 17 \equiv 2y^2 \mod n$ となる整数 x, y が存在することを証明せよ．

問題 $\boxed{6}$ （出題：雪江）A を $\mathbb{Q}$ 上の 2×2 行列全体のなす集合とする．A には行列の通常の和と積が定義されている．I_2 を単位行列とする．$x=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ に対し，$\overline{x}=\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ とおく．$\mathbb{O}$ を A の元の対 $(x,y)\in A^2$ 全体の集合とし，$(x,y),(u,v)\in\mathbb{O}, r\in\mathbb{Q}$ に対し，

$$(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v),\ r(x,y)=(rx,ry),$$
$$(x,y)(u,v)=(xu-\overline{v}y,vx+y\overline{u}),\ \|(x,y)\|=\det x+\det y$$

と定義する．これは（結合法則をみたさない）環である．$\mathbb{O}$ を分裂した八元数環という．$(0,0)$ のことを 0，(a,b) のことを $a+b\eta$ と書く．$\mathbb{O}$ 上の双線形形式を

$$\langle a,b\rangle=\frac{1}{2}(\|a+b\|-\|a\|-\|b\|)$$

と定義する．$a\in\mathbb{O}$ に対し aa を a^2 と書く．$e=(I_2,0)$ とすると，任意の $x\in\mathbb{O}$ に対し $xe=ex=x$ である．以下の (1)–(10) に答えよ ((7), (10) が目的)．

(1) 任意の $x,y\in\mathbb{O}$ に対し $\|xy\|=\|x\|\|y\|$ であることを証明せよ．

(2) $x\in\mathbb{O}$ が任意の $y\in\mathbb{O}$ に対し $\langle x,y\rangle=0$ なら $x=0$ であることを証明せよ．

(3) 任意の $x_1,x_2,y\in\mathbb{O}$ に対し $\langle x_1y,x_2y\rangle=\langle yx_1,yx_2\rangle=\|y\|\langle x_1,x_2\rangle$ であることを証明せよ．

(4) 任意の $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{O}$ に対し，$\langle x_1y_1,x_2y_2\rangle+\langle x_1y_2,x_2y_1\rangle=\langle x_1,x_2\rangle\langle y_1,y_2\rangle$ であることを証明せよ．

(5) 任意の $x\in\mathbb{O}$ に対し $x^2-\langle x,e\rangle x+\|x\|e=0$ であることを証明せよ．

(6) 任意の $x,y,z\in\mathbb{O}$ に対し

$$\langle xy,z\rangle=\langle y,\overline{x}z\rangle,\ \langle yx,z\rangle=\langle y,z\overline{x}\rangle,\ \langle xy,\overline{z}\rangle=\langle yz,\overline{x}\rangle$$

であることを証明せよ．

(7) 任意の $x,y,z\in\mathbb{O}$ に対し，$(zx)(yz)=(z(xy))z=z((xy)z)$ であることを証明せよ．

(8) $W=\{x\in\mathbb{O}\mid x+\overline{x}=0\}$ とする．

$$f_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ f_2=E_{12}\ ((1,2)\text{ 成分が }1\text{ で他は }0),\ f_3=E_{11}\eta,$$
$$f_4=-E_{21}\eta,\ f_5=-E_{21},\ f_6=E_{22}\eta,\ f_7=E_{12}\eta$$

とおく．$f_1,\ldots,f_7$ は W の $\mathbb{Q}$ ベクトル空間としての基底であることを証明せよ．

(9) $x,y,z\in W$ なら $\langle xy,\overline{z}\rangle=-\langle yx,\overline{z}\rangle$ であることを証明せよ．(よって，$\langle xy,z\rangle$ は W 上の「交代形式」である.)

(10) $i<j<k$ に対し $\langle f_if_j,f_k\rangle$ を求めよ．