特色入試サンプル試験問題

以下の 4 問すべてに答えよ．試験時間は 4 時間である．

問 1．a, b, c, d は正数であるとする．

(i) 平面上の四角形 $ABCD$ で

$$(\mathbf{S}) \qquad AB = a,\ BC = b,\ CD = c,\ DA = d$$

を満たすものが存在するための a, b, c, d に関する必要十分条件を求めよ．

(ii) a, b, c, d が (i) で求めた条件を満たすとき，ある円に内接するような (S) を満たす四辺形がとれることを示せ．

問 2．$[0,1]$ 上の連続関数 f は $f(x) > 0$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を満たすものとし，$\gamma = \int_0^1 \frac{dx}{f^2}$ とおく．次の条件

(D) $[0,1]$ 上の微分可能関数であり，$x = 0$ で値 0 を，$x = 1$ で値 1 を取り，その導関数は連続

を満たす関数 w に対し，

$$F(w) = \int_0^1 |w'(x)|^2 f^2(x)\ dx$$

とおく．このとき，以下の設問に答えよ．

(i) $[0,1]$ 上の連続関数 g, h に対し

$$\int_0^1 |g(x)h(x)|\ dx \leqq \Big(\int_0^1 |g(x)|^2\ dx\Big)^{1/2}\Big(\int_0^1 |h(x)|^2\ dx\Big)^{1/2}$$

が成立することを示せ．さらに，上の不等式で等号が成立するための，g, h に関する必要十分条件を求めよ．

(ii) 条件 (D) を満たすようなすべての関数 w に対し，$F(u) \leqq F(w)$ となるような，(D) を満たす関数 u を求め，$F(u)$ の値を γ を用いて表せ．

問 3．無限数列 $a_1, a_2, \ldots$ に対する 2 つの条件 (P) と (AP) を以下のように定める．

(P) 次を満たす自然数 N が存在する：
すべての自然数 n に対して $a_{n+N} = a_n$ が成り立つ．

(AP) どのような自然数 T が与えられてもそれに対して次をみたす自然数 C と無限数列 $N_1, N_2, \ldots$ が取れる：
すべての自然数 $j = 1, 2, \ldots$ と $n = 1, \ldots, T$ に対して，$a_{n+N_j} = a_n$，かつ，$N_j < N_{j+1} < N_j + C$ が成り立つ．

このとき，(AP) を満たすが (P) は満たさない無限数列が存在することを示せ．

問 4. 次のような数列 $a_1, a_2, \ldots$ を考える．

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \geqq 1), \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = 1$$

$m \geqq 6$ とし，a_m は素数であるとする．$k = (a_m)^2$ とおく．整数 b_n, c_n を

$$(1+\sqrt{5})^n = b_n + c_n\sqrt{5}$$

が成り立つように定める．以下の設問に答えよ．

1. c_n を a_n を用いて表わせ．
2. $b_k - 1$ と $c_k - 1$ は a_m で割り切れることを示せ．
3. $k-1$ は m で割り切れることを示せ．

参考問題

問 1. 直交座標の入った 2 次元平面上において, 各成分が整数からなる格子点全体を考える. すべての $k = 0, 1, ..., n-1$ に対し, 格子点 $\lambda(k)$ と $\lambda(k+1)$ が互いに隣り合う格子点の列 $\lambda = [\lambda(0), \lambda(1), ..., \lambda(n)]$ を長さ n のパスと見なす. 長さ n のパス $\lambda = [\lambda(0), \lambda(1), ..., \lambda(n)]$ が自己回避的であるとは, すべての $0 \leq j \neq k \leq n$ に対し $\lambda(j) \neq \lambda(k)$ を満たす事とする. 長さ n の自己回避的なパス λ に対し以下の 3 ステップを行い, 新しいパス λ' を作る事を 1 回の操作と見なす.

(**ステップ 1**) 時刻 k $(0 \leq k \leq n-1)$ を一つ選ぶ.

(**ステップ 2**) λ の時刻 $k+1$ 以降のパス $[\lambda(k+1), ..., \lambda(n)]$ に以下の (a), (b) いずれかの変形を行い, パス $[\lambda'(k+1), ..., \lambda'(n)]$ を作る

- **(a)** $\pm\pi/2$ 回転, すなわち $\lambda(k)$ を中心に $[\lambda(k+1), ..., \lambda(n)]$ を $\pi/2$ あるいは $-\pi/2$ 回転して得られるパスを $[\lambda'(k+1), ..., \lambda'(n)]$ とする.
- **(b)** 座標軸に平行する折り返し, すなわち $\lambda(k)$ を通り, x 軸 もしくは y 軸に平行な直線に関して $[\lambda(k+1), ..., \lambda(n)]$ を折り返したものを $[\lambda'(k+1), ..., \lambda'(n)]$ とする.

(**ステップ 3**) $[\lambda(0), ..., \lambda(k)]$ に変形後のパスをつないで, 新しいパス $\lambda' = [\lambda'(0), ..., \lambda'(n)]$ を作る.

原点を出発する $(\lambda(0) = (0,0))$ 長さ n の自己回避的なパスに対し，上の操作を行って得られるパス λ' が再び自己回避的な始点 0 のパスとなるなら，それを "良い" 操作と言うことにする．このとき，以下の設問に答えよ．

(i) 原点を出発する長さ n の自己回避的なパスを 2 つ与える．上記の操作のうち, 自己回避的なパスへ変形する良い操作を繰り返す事で, 与えられた一方のパスを他方のパスへ変形できる事を示せ.

(ii) (i) において, 高々 $100n$ 回の良い操作で変形が完了する事を示せ.

問 2. 次のような表示を考える．

$$x^x \qquad x^{x^x} \qquad x^{x^{x^x}}$$

一般に変数 x が n 個右肩上がりに並んだ表示を考える．これに厳密な意味を持たせるためには，次のように括弧を付けて意味づけする必要がある．

$$(x^x) \qquad \left((x^x)^x\right) \qquad \left(x^{(x^x)}\right) \qquad \left(\left(x^{(x^x)}\right)^x\right) \qquad \left((x^x)^{(x^x)}\right)$$

上の括弧付は，日本語式ではそれぞれ「x の x 乗」「x の x 乗の x 乗」「x の x の x 乗乗」「x の x の x 乗乗の x 乗」「x の x 乗の x の x 乗乗」と読む．このとき以下の設問に答えよ．

1. n 個の変数 x に対し，日本語式の読み方を一つ定めれば，その式の値が一意に決定されることを証明せよ．
2. 変数 x が右肩上がりに n 個並んでいる場合に，そのような読み方（すなわち，括弧の付け方）が全部で C_n 通りあるとする．C_5, C_6, C_7 を求めよ．
3. $n = 2014$ とする．変数 x が右肩上がりに 2014 個並んでいる場合に，括弧で意味づけをした後に $x = 2$ を代入する．このようにして得られる整数の個数は，$\dfrac{C_{2014}}{2}$ 個以下であることを示せ.

出題意図

理学部特色入試では，問題文を読み理解出来る能力，高校数学の知識を使って問題を解決し解答を論理的に記述できる能力，および長い試験時間を通して数学の問題を考え続けることができる能力を見る．サンプル問題と参考問題は，すべて高校数学の範囲で解答可

能であり，難しいのは高校数学で学んだ知識をどのように使うのか，と言うことである．また，必ずしも完全な解答を求めているわけでもなく，試行錯誤を通してどのように考えたのかも重視する．サンプル問題 1 は高校生にとって，比較的取り組みやすい問題かもしれない．大学入学試験らしい問題であるが，初等幾何，不等式，三角関数，中間値の定理などを複合的に用いる点が難しい．（小問 (ii) の問いかたが「(S) を満たす四辺形はある円に内接することを示せ」ではなく，「(S) を満たす四辺形が取れることを示せ」となっているのはなぜか，考えてみよう．）問 2 も，2 次方程式の判別式，不等式，微分積分などを複合的に用いる問題となっている．積分不等式を扱うため，具体的な関数に対しその導関数や原始関数を計算する問題とは趣を異にしており，高校生にとっては見慣れない問題であろう．（問 2 については，関数 f の微分可能性が仮定されていないため，古典的な意味では微分方程式に直せないことに注意．）問 3 はほとんどの高校生は見たこともない問題であろう．まず，問題文に書かれている数学的内容，つまり，条件 (P) と条件 (AP) の意味することがどれだけ理解できるか，さらに，そうした理解に基づいて，(AP) を満たし，かつ (P) を満たさない数列を構成する能力があるかを見る問題である．条件を満たす数列の構成方法も一通りではなく，条件をどのように解釈するかによって解答へ至る道は異なるだろう．問 4 は，数学好きの高校生にはおなじみの話題である．フィボナッチ数は高校の発展学習でもっともよく取り上げられる題材の一つであるため，今回あえてサンプル問題に含めることにした．フィボナッチ数についてどれだけ知っているかを問う知識問題とはなっていない．具体例を計算しながらじっくり取り組むことで，解法へのヒントが見えてくるかもしれない．フィボナッチ数を知らない生徒もぜひ挑戦して欲しい．

理学部特色入試の意図する所を理解してもらうため，サンプル問題だけでなく参考問題も付け加えた．いずれの参考問題も問題文が比較的長い．公式を当てはめて問題を解決する能力を問うものではない．複雑な数学的内容を正しく把握する能力や，数学的対象をじっくりと観察する能力などが問われる．たとえば，格子点上の 2 点を結ぶ折れ線の個数を求める問題は，確率とからめて過去の大学入学試験でも出題されておりめずらしくはない．参考問題 1 のポイントは，折れ線（パス）をある規則の下で変形させることであり，変形操作の数学的性質を深く理解する能力が求められる．参考問題 2 の 小問 1 は，一見当たり前にも思えることを筋道立てて説明する能力を問う問題である．