[SG5] Category Theory and Natural Sciences

平成 29 年度 MACS 成果報告会 SG5

日浦 健，向井 大智

物理学・宇宙物理学専攻 M1，数理解析研究所 D1

23/2/2018

一年間で何をしたか？

- 圏論 (category theory) のお勉強：
  Leinster, Basic Category Theory
- リソース理論：
  Coecke et al., A mathematical theory of resources
- 熱力学の圏論的理解に向けて：
  Lieb and Yngvason, The Physics and Mathematics of the Second Law of Thermodynamics

圏 (category) とは？

- 対象 $A, B, \ldots$ とその間の射 (矢印) $f : A \to B$ からなる．
- 射の間の合成が定義されていて，結合律と恒等射 1 がある．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[drr, "g\circ f"] & & D \\ B \arrow[urr, "h\circ g"] \arrow[rr, "g"'] & & C \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "1_B"] \arrow[dr, "g"] & \\ & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

例

集合とその間の写像，ベクトル空間とその間の線型写像，群それ自体など

圏論で現れるさまざまな概念

- 関手：圏の間の「射」
- 自然変換：関手の間の「射」
- モノイダル圏：対象の間の「積」が定義できるような圏

... etc.

例：○○は△△ (圏論における何らかの概念) である

- ベクトル空間の双対を取る操作は反変関手 $\mathbf{Vect}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vect}$
- 有限次元ベクトル空間の二重双対との同型は自然同型

自然科学とどのように関係しうるか？

一見全く異なっているさまざまな科学理論の中で現れる概念や操作を，圏論の語法を通じてひとつにまとめ，それらの間の関係性を議論することが可能になる？

例：「エントロピー (あるいはそれに類するもの)」は，熱力学，統計力学，情報理論，力学系，計算複雑性理論など多くの領域でそれぞれ一見異なった概念として現れるが，それらの関係はなんだろう？