ポスター発表「体の乗法群」の概要

—— 体という観点では，乗法は加法より多様 ——

京都大学理学部　2 回生　中田裕貴

中学生のころ，数は沢山あるのになぜ演算は四則演算くらいしか普段使わないのかと思ったのがこの研究のきっかけである．四則演算は集合に体の構造を定めることから，新たに，かけ算を加法として体の構造を定めてゆけば，自然に演算を増やしていけるのではと考えた．そこで，このかけ算は加法の役割と乗法の役割の両方を果たすことになるので，この状況はどれほど起こりやすいものなのか，言い換えると，**体の加法群と体の乗法群はどう違うのか**考えることにした．これが今回設定した課題である．

既に知られていることとして，体の加法群は素体上の線形空間である．例えば，実数体 $\mathbb{R}$ の加法群は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の線形空間である．一方，体の乗法群についてはそれほどよく分かっていないが（Fuchs, 2015, pp.704-705），**代表的な無限体の乗法群は線形空間ではない**：

- $\mathbb{Q}^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\oplus \aleph_0}$
- $\mathbb{Q}(\alpha)^\times \cong \mathbb{Z}/2m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{\oplus \aleph_0}$　（α は $\mathbb{Q}$ 上代数的，m はある正の整数）
- K が代数閉体であるとき（例えば $\mathbb{C}$），
$$K^\times \cong \begin{cases} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}^{\oplus \mathfrak{m}} & (K \text{ の標数が } 0 \text{ のとき}), \\ \bigoplus_{q \neq p} \mathbb{Z}(q^\infty) \times \mathbb{Q}^{\oplus \mathfrak{m}} & (K \text{ の標数が素数 } p \text{ のとき}). \end{cases}$$
但し，$\mathfrak{m}$ はある濃度，$\mathbb{Z}(q^\infty) := \mathbb{Z}[1/q]/\mathbb{Z}$ は q^∞ 型の群（q は素数）．
- K が実閉体であるとき（例えば $\mathbb{R}$），
$$K^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}^{\oplus \mathfrak{m}}.$$
但し，$\mathfrak{m}$ はある濃度．
- $\mathbb{Q}_2^\times \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$
- $\mathbb{Q}_p^\times \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$　（p は奇素数）

ここで，体 K に対し，$K^\times$ で K の乗法群を表している．

これらのことから，**「無限体の乗法群は，いかなる体上の線形空間にもならない」**と仮説を立てた．仮説を肯定するために，乗法群が線形空間の構造を持つような無限体の候補を必要条件で絞ることを方針とした．まず次の定理を導いた．

定理 1. 体 L, K のいずれの標数も 2 でなければ，$L^\times$ は K 線形空間とはならない．

Proof. 記号の整合性のため，スカラー倍は a^r $(a \in L^\times,\ r \in K)$ のように累乗の形で書く．$L^\times$ の K 上の基底を S とする．L の標数は 2 でないので，$-1 \neq 1$ である．よって，ある $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ と a_1, ..., $a_k \in S$, r_1, ..., $r_k \in K \setminus \{0\}$ が存在して $a_1^{r_1} \cdots a_k^{r_k} = -1$ である．すると，

$$1 = (-1)^2 = a_1^{2r_1} \cdots a_k^{2r_k}$$

で，K の標数は 2 でないので，$2r_1$, ..., $2r_k \neq 0$ であり，これは基底が線形独立であることに反する（1 は線形空間 $L^\times$ において零ベクトル）．従って題意を示せた． □

この定理から，無限体 L の乗法群が線形空間となる必要条件として，

- L の標数は 2
- 乗法群 $L^\times$ は $\mathbb{Q}$ 線形空間
- L の 0, 1 以外の元は全て素体 $\mathbb{F}_2$ 上超越的

が得られる．

だが結果としては，仮説に反し，絞った候補の中に，乗法群が線形空間となるような無限体が存在することが分かった．具体的には $L_0 := \mathbb{F}_2((x))(\{x^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}})$ が該当している．但し，$\mathbb{F}_2((x))$ は，$\mathbb{F}_2$ の元を係数とし x を変数とする 1 変数ベキ級数体（Laurent 展開体）であり，$\{x^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は，$(x^{1/mn})^m = x^{1/n}$ $(\forall m, n \in \mathbb{N})$, $x^{1/1} = x^1 = x$ となるような $\overline{\mathbb{F}_2((x))}$ の元の列とする．乗法群 $L_0^\times$ が $\mathbb{Q}$ 上の線形空間であることは Hensel の補題を用いて示した．

今回の研究の成果として，体のクラスでは，乗法は加法と違ってより多様であることが分かった．体の加法群の構造は素体上の線形空間と決まるが，体の乗法群では線形空間となるものは限られており，混合 Abel 群や自由 Abel 群など様々なものがある．一方，集合論や圏論では，和，積というものは対称的であり，「体」という構造はそれらとは少し離れたものだと分かった．

今後は，大学での勉強を進めて今回の研究に生かせるものがないか探りたい．例えば，反例となった $L_0 := \mathbb{F}_2((x))(\{x^{1/n}\}_{n\in\mathbb{N}})$ に関して，更に興味深い結果が得られないか考えている．

A　用語の簡単な説明

標数　0, 1 をそれぞれ体 K の零元，単位元とするとき，$\overbrace{1+1+\cdots+1}^{p} = 0$ となる最小の正整数 p のことを，K の標数という．これは存在すれば素数であり，存在しなければ 0 とおく．例えば，実数体 $\mathbb{R}$ では 1 を何回足しても 0 にならないので，$\mathbb{R}$ の標数は 0 である．

素体　$\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$（$p$ は素数）のことを指す．体 K の標数が 0 なら $\mathbb{Q} \subset K$ とみなせ，K の標数が $p > 0$ なら $\mathbb{F}_p \subset K$ とみなせる．

B　参考文献

- Fuchs, László (2015) *Abelian groups.* Springer.

- May, Warren (1972) *Multiplicative groups of fields.* Proc. London Math. Soc. (3)24. pp.295-306.
- 日本数学会 編（2007）岩波数学辞典. 第 4 版. 岩波書店.
- 藤崎源二郎（1991）体とガロア理論（岩波基礎数学選書）. 岩波書店
- 松村英之（2000）可換環論. 復刊. 共立出版
- 雪江明彦（2013）整数論 1; 初等整数論から p 進数へ. 第 1 版. 日本評論社.